Exercice 1 : **(5 points)** *Commun à tous les candidats*

1) a) Traduction d'énoncé :

La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur F_1, donc $\mathbf{P(F_1) = \frac{1}{2}}$

Le tiers est fabriquée par le fournisseur F_2, donc $\mathbf{P(F_2) = \frac{1}{3}}$

Le reste est fabriquée par le fournisseur F_3, donc $\mathbf{P(F_3)} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{6}}$

5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur F_1 ont un défaut ;

Donc $P_{F_1}(D) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ donc $P_{F_1}(\overline{D}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

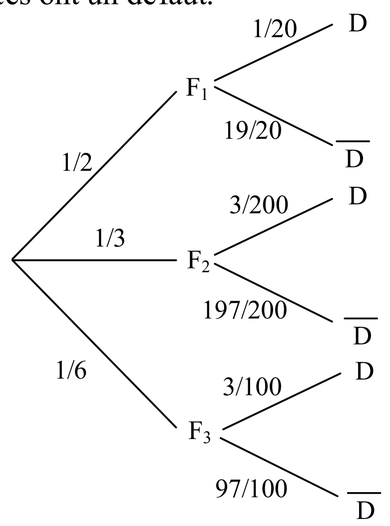
1,5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur F_2 ont un défaut ;

Donc $P_{F_2}(D) = \frac{1,5}{100} = \frac{3}{200}$ donc $P_{F_2}(\overline{D}) = 1 - \frac{3}{200} = \frac{197}{200}$

Sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

Donc $P(D) = \frac{3,5}{100} = \frac{7}{200}$

Arbre pondéré associé à cette expérience :



b) La probabilité que la paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur F_1 et présente un défaut est égale à $P(F_1 \cap D)$.

$P(F_1 \cap D) = P(F_1) \times P_{F_1}(D)$

$P(F_1 \cap D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{20}$

$\mathbf{P(F_1 \cap D) = \frac{1}{40}}$

La probabilité que la paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur F_1 et présente un défaut est égale à $\frac{1}{40}$.

c) $P(F_2 \cap D) = P(F_2) \times P_{F_2}(D)$

$P(F_2 \cap D) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{200}$

$\mathbf{P(F_2 \cap D) = \frac{1}{200}}$

d) F_1, F_2 et F_3 forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(F_1 \cap D) + P(F_2 \cap D) + P(F_3 \cap D)$$

Soit $P(F_3 \cap D) = P(D) - P(F_1 \cap D) - P(F_2 \cap D)$

$$P(F_3 \cap D) = \frac{7}{200} - \frac{1}{40} - \frac{1}{200}$$

$$\mathbf{P(F_3 \cap D) = \frac{1}{200}}$$

e) Sachant que la paire de chaussette prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3, la probabilité qu'elle présente un défaut est égale à : $P_{F_3}(D)$

$$P_{F_3}(D) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(F_3)}$$

$$P_{F_3}(D) = \frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{6}}$$

$$P_{F_3}(D) = \frac{6}{200}$$

$$P_{F_3}(D) = \frac{3}{100}$$

Sachant que la paire de chaussette prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3, la probabilité qu'elle présente un défaut est $\frac{3}{100}$.

2) a) Notons X la variable aléatoire égale au nombre de chaussettes d'un lot qui présente un défaut.

X suit une loi binomiale de paramètres n = 6 (il y a 6 paires) et $p = P(D) = \frac{7}{200}$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \times \left(\frac{7}{200}\right)^2 \times \left(\frac{193}{200}\right)^4$$

$P(X = 2) = 0{,}016$ au millième près.

La probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut est égale à 0,016 au millième près.

b) On a $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$P(X \leqslant 1) = \binom{6}{0} \times \left(\frac{7}{200}\right)^0 \times \left(\frac{193}{200}\right)^6 + \binom{6}{1} \times \left(\frac{7}{200}\right)^1 \times \left(\frac{193}{200}\right)^5$$

$P(X \leq 1) = 0{,}983$au millième près.

La probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

<u>Exercice 2 :</u> (5 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1. OACD est un carré direct et A a pour affixe 1. Donc OD = 1 et D est situé sur l'axe des ordonnées avec une ordonnée négative. Donc $d = -i$.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DC}$ donc $a - 0 = c - d$ soit $c = a + d = 1 - i$.
Les affixes c et d des points C et D sont respectivement 1 − i et i.

2. **a)** r est la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' l'image de M par r.

Alors $z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$ avec $z_O = 0$

$z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$

L'écriture complexe de r est $\boldsymbol{z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z}$.

b) OBEF est un carré direct, donc OBF est un triangle rectangle isocèle en O.
On en déduit que F est l'image de B par r.

$F = r(B)$

$f = e^{i\frac{\pi}{2}} b$ avec $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$f = ib$

On en déduit que l'affixe f du point F est ib.

c) OBEF est un carré direct donc : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FE}$.

$b = e - f$ soit $e = b + f = b + ib$

L'affixe e du point E est b(1 + i).

3. Soit G le point tel que le quadrilatère OFGD soit un parallélogramme.

On a $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{FG}$ soit $d = g - f$

$g = d + f$

$g = -i + ib$

$g = i(b - 1)$

L'affixe g du point G est égal à i(b − 1).

4. $\dfrac{e-g}{c-g} = \dfrac{b(1+i) - i(b-1)}{1 - i - i(b-1)} = \dfrac{b + ib - ib + i}{1 - i - ib + i} = \dfrac{b+i}{1 - ib} = \dfrac{(b+i)(1+ib)}{(1-ib)(1+ib)} = \dfrac{b + ib^2 + i - b}{1 + b^2}$

$\dfrac{e-g}{c-g} = \dfrac{i(b^2+1)}{b^2+1} = i$ on a bien $\boldsymbol{\dfrac{e-g}{c-g} = i}$

$\left|\dfrac{e-g}{c-g}\right| = \dfrac{|e-g|}{|c-g|} = \dfrac{GE}{GC}$ et $|i| = 1$ donc $\dfrac{GE}{GC} = 1$, on a donc GE = GC.

$\arg\left(\dfrac{e-g}{c-g}\right) = (\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GE})$ et $\arg i = \dfrac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GE}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Le triangle EGC est rectangle et isocèle en G.

<u>Exercice 2 :</u> (5 points) *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que :

$$\begin{cases} N \equiv 5(13) \\ N \equiv 1\ (17) \end{cases}$$

a) $239 = 13 \times 18 + 5$ donc $239 \equiv 5(13)$
$239 = 14 \times 17 + 1$ donc $239 \equiv 1(17)$

239 est solution de ce système.

b) Soit N un entier relatif solution du système donc :
$N \equiv 5\ (13)$ donc il existe un entier relatif y tel que $N = 5 + 13y$
$N \equiv 1\ (17)$ donc il existe un entier relatif x tel que $N = 1 + 17x$
$N = 5 + 13y = 1 + 17x$ d'où $4 = 17x - 13y$.

N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$ (E).

c) $17 \times 1 - 13 \times 1 = 4$
Un couple d'entiers solution de l'équation (E) est $(1 ; 1)$.

Soient (x , y) un couple d'entiers relatifs solution de (E).
$17x - 13y = 4$
$17x - 13y = 17 \times 1 - 13 \times 1$
$17(x - 1) = 13(y - 1)$
Or 17 et 13 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss :
17 divise $(y - 1)$ et 13 divise $(x - 1)$

Il existe donc un entier relatif k tel que : $y - 1 = 17k$ et $x - 1 = 13k$
$y = 1 + 17k$ et $x = 1 + 13k$
On a démontrer que si (x , y) un couple d'entiers relatifs est solution de (E) alors il existe un entier relatif k tel que $x = 1 + 13k$ et $y = 1 + 17k$.

<u>Réciproquement</u> : pour tout entier relatif k, le couple $(1 + 13k ; 1 + 17k)$ est solution de (E).
En effet : $17 \times (1 + 13k) - 13 \times (1 + 17k) = 17 + 17 \times 13k - 13 - 13 \times 17k = 4$.

<u>Conclusion</u> : L'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) est :

$$\{ (1 + 13k ; 1 + 17k) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

d) $N = 1 + 17x$ et il existe un entier relatif k tel que $x = 1 + 13k$ et $y = 1 + 17k$ soit solution de (E).
$N = 1 + 17 \times (1 + 13k) = 1 + 17 + 17 \times 13k = 18 + 221k$.

Il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221\ k$

e) $\begin{cases} N \equiv 5(13) \\ N \equiv 1\ (17) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221\ k$ (question précédente

$\Rightarrow N \equiv 18\ (221)$

<u>Réciproquement</u> :

$N \equiv 18\ (221)$ $\Rightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + k \times 221$

Or $221 = 17 \times 13$ donc $N = 18 + k \times 17 \times 13$

$N = 18 + (17k) \times 13$

$N \equiv 18(13)$

$N \equiv 5(13)$

de même : $N = 18 + k \times 17 \times 13$

$N = 18 + (13k) \times 17$

$N \equiv 18\ (17)$

$N \equiv 1(17)$

$\Rightarrow \begin{cases} N \equiv 5(13) \\ N \equiv 1\ (17) \end{cases}$

On a bien l'équivalence entre $N \equiv 18\ (221)$ et $\begin{cases} N \equiv 5(13) \\ N \equiv 1\ (17) \end{cases}$

2.

a) <u>1^{er} méthode :</u> en utilisant le petit théorème de Fermat.

« Soit p un nombre premier. pour tout entier relatif a non divisible par p, on a : $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$ »

17 est un nombre premier. 10 est un entier relatif non divisible par 17.

donc $10^{17-1} \equiv 1(17)$ soit $10^{16} \equiv 1\ (17)$.

Il existe donc un entier naturel $k = 16$ tel que $10^k \equiv 1\ (17)$.

<u>$2^{ème}$ méthode</u> : avec les congruences.

$10 \equiv -7\ (17)$

$10^2 \equiv (-7)^2\ (17)$

$10^2 \equiv 49\ (17)$

$10^2 \equiv -2\ (17)$

$10^{2\times 4} \equiv (-2)^4\ (17)$

$10^8 \equiv 16\ (17)$

$10^8 \equiv -1\ (17)$

$10^{8\times 2} \equiv (-1)^2\ (17)$

$10^{16} \equiv 1\ (17)$.

Il existe donc un entier naturel $k = 16$ tel que $10^k \equiv 1\ (17)$.

b) $10^{\ell} \equiv 18\ (221) \Leftrightarrow \begin{cases} 10^{\ell} \equiv 5(13) \\ 10^{\ell} \equiv 1\ (17) \end{cases}$

Montrons qu'il n'existe pas d'entier p tel que $10^p \equiv 5(13)$

- $10 \equiv -3\ (13)$
- $10^2 \equiv 9\ (13)$
- $10^3 \equiv -27\ (13) \equiv -1(13)$
- $10^4 \equiv -10\ (13) \equiv 3(13)$
- $10^5 \equiv 30\ (13) \equiv 4(13)$
- $10^6 \equiv 40(13) \equiv 1\ (13)$

On en déduit que $10^p \equiv \begin{cases} -3\ (13) & \text{si } p \equiv 1\ (6) \\ 9\ (13) & \text{si } p \equiv 2\ (6) \\ -1\ (13) & \text{si } p \equiv 3\ (6) \\ 3\ (13) & \text{si } p \equiv 4\ (6) \\ 4\ (13) & \text{si } p \equiv 5\ (6) \\ 1\ (13) & \text{si } p \equiv 0\ (6) \end{cases}$

Il n'existe pas d'entier naturel p tel que $10^p \equiv 5\ (13)$.

Donc d'après l'équivalence de la question **1. e) il n'existe pas d'un entier naturel ℓ tel que $10^{\ell} \equiv 18\ (221)$.**

<u>Exercice 3 :</u> (6 points) *Commun à tous les candidats*

Partie A : existence et unicité de la solution

1. La fonction f est la somme sur $]0\ ,+\infty[$ des fonction $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \ln x$, toutes deux dérivables sur $]0\ ,+\infty[$.
Donc par somme la fonction f est dérivable sur $]0\ ,+\infty[$.
Pour tout x de $]0\ ,+\infty[$: $f\,'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+x}{x}$
Sur $]0\ ,+\infty[$: $x > 0$ et $1 + x > 0$, donc $f\,'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]0\ ,+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Sur $]0\ ,+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante à valeurs dans $]-\infty\ ;+\infty[$.
$0 \in\ ]-\infty\ ;+\infty[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ,+\infty[$.**

3. En utilisant la calculatrice on a : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -0{,}19 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$

Donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq 0 \leq f(1)$ soit $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq f(\alpha) \leq f(1)$

Comme f est strictement croissante sur $]0\ ,+\infty[$, on a : $\boldsymbol{\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1.}$

Partie B : encadrement de la solution α

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.
a) Les fonctions $x \longmapsto 4x$ et $x \longmapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0\ ,+\infty[$.
Donc par somme la fonction $x \longmapsto 4x - \ln x$ est dérivable sur $]0\ ,+\infty[$.
Donc la fonction g est dérivable sur $]0\ ,+\infty[$.

Pour tout x de $]0\ ,+\infty[$: $g\,'(x) = \dfrac{4 - \dfrac{1}{x}}{5} = \dfrac{4x-1}{5x}$

Sur $]0\ ,+\infty[$, $5x > 0$ donc le signe de $g\,'(x)$ est le même que celui de $4x - 1$.

$4x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{4}$ $\qquad 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$ $\qquad 4x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{4}$

Donc :
Sur $\left]0\ ;\dfrac{1}{4}\right[$ g'(x) est négative, donc g est décroissante
Sur $\left]\dfrac{1}{4}\ ;+\infty\right[$ g'(x) est positive, donc g est croissante
Pour $x = \dfrac{1}{4}$, g est admet un minimum.

b) Comme g est croissante sur $\left]\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$, alors pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, on a $g\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant g(x) \leqslant g(1)$.

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2+\ln 2}{5} = 0{,}54 > \frac{1}{2} \qquad g(1) = \frac{4}{5} < 1$$

Donc : $\frac{1}{2} \leqslant g(x) \leqslant 1$

Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, g(x) appartient à cet intervalle.

c) soit un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
x \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow \ln x = -x\\
&\Leftrightarrow x + \ln x = 0\\
&\Leftrightarrow 5x - 4x + \ln x = 0 \qquad (x = 5x - 4x)\\
&\Leftrightarrow -4x + \ln x = -5x\\
&\Leftrightarrow 4x - \ln x = 5x\\
&\Leftrightarrow \frac{4x - \ln x}{5} = x\\
&\Leftrightarrow g(x) = x
\end{aligned}$$

Un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,,+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si g(x) = x.

2. a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = g(u_0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}54 > \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang n et démontrons là au rang n + 1 :

$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Comme g est croissante sur $\left]\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$ on a :

$$g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$$

$$\frac{1}{2} \leq g\left(\frac{1}{2}\right) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq g(1) \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

La propriété est vérifiée au rang n + 1.

Conclusion : la propriété est vérifiée au rang 0, elle est héréditaire, donc :

Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

b) Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$, donc la suite (u_n) est croissante est majorée par 1, donc elle converge vers une limite ℓ .

Comme $u_{n+1} = g(u_n)$ et que la fonction g est continue sur $]0\ ;+\infty[$, alors la limite ℓ vérifie $\ell = g(\ell)$.

D'après la question **1.c)** :

ℓ vérifie $\ell = g(\ell)$	si et seulement si	ℓ est solution de (E).
	si et seulement si	ℓ est solution de $\ln x = -x$
	si et seulement si	ℓ est solution de $x + \ln x = 0$
	si et seulement si	ℓ est solution de $f(x) = 0$
	si et seulement si	$\ell = \alpha$

Donc la suite (u_n) converge vers α.

3. Recherche d'une valeur approchée de α

a) A l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale est :

$$\mathbf{u_{10} = 0{,}567124}$$

b) On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α donc :

$$u_{10} \leq \alpha \leq u_{10} + 5 \times 10^{-4}$$
$$0{,}567124 \leq \alpha \leq 0{,}567124 + 5 \times 10^{-4}$$
$$0{,}567124 \leq \alpha \leq 0{,}567624$$

Un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales est : $0{,}567 \leq \alpha \leq 0{,}568$.

Exercice 4 : **(4 points)** *Commun à tous les candidats*

1. Question 1

y' + 2y = 6 $\Leftrightarrow$ y' = − 2y + 6

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $Ce^{-2x} - \dfrac{6}{-2} = Ce^{-2x} + 3$ où C est un réel.

On détermine C à l'aide de la condition initiale $f(0) = 1$.

$f(0) = Ce^0 + 3 = C + 3 = 1$. Donc $C = -2$.

$f(x) = -2e^{-2x} + 3$

Réponse (1) : $f(x) = -2e^{-2x} + 3$

2. Question 2

Soit un triangle ABC et I le point tel que $2\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$2\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ alors I est le barycentre du système {(B,2) ; (C,1)}.

Supposons que G soit le barycentre du système {(A,1),(B,2),(C,1)}

Par associativité du barycentre, G est aussi le barycentre du système {(A, 1) ; (I,3)}.

Donc G, A et I sont alignés.

Réponse(3): {(A,1),(B,2),(C,1)}

3. Question 3

Le plan P d'équation cartésienne : $x - 3y + 2z = 5$ a pour vecteur normal $\vec{n}\,(1\ ;\ -3\ ;\ 2)$.

Pour que H soit le projeté orthogonal de A sur P, il doit appartenir au plan P et $\overrightarrow{AH}$ doit être colinéaire à $\vec{n}$.

H_1 n'appartient pas à P : en effet $3 - 3 \times (-1) + 2 \times 4 = 3 + 3 + 8 = 14 \neq 5$.

$\overrightarrow{AH_2}\,(2\ ;\ -6\ ;\ -3)$ et $\dfrac{-6}{-3} \neq \dfrac{-3}{2}$ donc $\overrightarrow{AH_2}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$.

$\overrightarrow{AH_3}\,(1\ ;\ -3\ ;\ 2)$ donc $\overrightarrow{AH_3} = \vec{n}$, les vecteurs sont colinéaires.

Réponse (3): H(3 , 0 , 1)

4. Question 4

$$m = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Or sur [0 ; 1]

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x^2 \leq 1$$ car la fonction carré est croissante sur [0 ; 1].

$$1 \leq 1 + x^2 \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$ car la fonction inverse est décroissante sur [1 ; 2]

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \leq m \leq 1 \times 1$$

$$\frac{1}{2} \leq m \leq 1.$$

Dans les 3 réponses proposées, seule $\frac{\pi}{4}$ est comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Réponse (2): $\frac{\pi}{4}$