Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion 16 septembre 2011

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. La loi suivie par la variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de moteurs tombant en panne est une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,12$.

   On a $p(X=2) = \binom{20}{2} \times 0,12^2 \times (1-0,12)^{20-2} = 190 \times 0,12^2 \times 0,88^8 \approx 0{,}274\,03 \approx 0,274$ à 10^{-3} près.

2. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,88^{20} \approx 0{,}922\,4 \approx 0,922$ à 10^{-3} près.

Partie B

1. On a $p(Y \leqslant 1) = \displaystyle\int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-\lambda} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 0,12 \iff \mathrm{e}^{-\lambda} = 0,88 \iff$
   $-\lambda = \ln 0,88$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff -\lambda \approx -0{,}127\,8 \iff$
   $\lambda \approx 0,128$ à 10^{-3} près.

2. On a $p(Y > 3) = 1 - p(Y \leqslant 3) = 1 - \displaystyle\int_0^3 0,128\mathrm{e}^{-0,128x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0,128x}\right]_0^3 = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-0,128\times 3} - 1\right) =$
   $\mathrm{e}^{-0,384} \approx 0{,}681\,1 \approx 0,681$ à 10^{-3} près.

3. On a $p_{Y>1}(Y > 4) = p_{Y>1}(Y > 1+3) = p(Y > 3)$ puisqu'on a une loi exponentielle sans vieillissement, soit environ 0,681.

4. **a.** Posons $\left\{\begin{array}{lllll} u'(x) & = & \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & v(x) & = & x \\ u(x) & = & -\mathrm{e}^{-\lambda x} & v'(x) & = & 1\end{array}\right.$

   Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $\mathbb{R}_+$, on peut in tégrer par parties :

   $F(t) = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t + \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = -t\mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t} + 0 + \frac{1}{\lambda} =$

   $F(t) = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t} - t\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

   b.
   - $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$;
   - $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$;

   Donc par somme de limites : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = \frac{1}{\lambda}$.

   Comme $\lambda \approx 0,128 \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda} \approx 7{,}812\,5 \approx 7,8$.

   Donc $d_m \approx 7,8$.

   La durée moyenne de vie d'un moteur est légérement inférieure à 7 ans et 10 mois.

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A - Étude du signe d'une fonction

1. f somme de fonctions dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

   $f'(x) = 2x + \dfrac{4}{x}$.

   Comme $x > 0 \Rightarrow 2x > 0$ et $\dfrac{4}{x} > 0$, on déduit que $f'(x) > 0$.

   La fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} 4\ln x = -\infty$; par somme de limites, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

  L'axe des ordonnées est donc asymptote verticale à la courbe représentative de f au voisinage de zéro.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$; par somme de limites, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. La fonction f continue car dérivable croît sur $]0\,;\,+\infty[$ de $-\infty$ à $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$; donc tout réel, en particulier 0 a un antécédent unique dans $]0\,;\,+\infty[$.

Il existe donc α réel supérieur à zéro tel que $f(\alpha) = 0$.

3. De la question précédente résulte le signe de $f(x)$:

- si $0 < x < \alpha$: $f(x) < 0$;
- si $x = \alpha$: $f(x) = 0$;
- si $\alpha < x$: $f(x) > 0$.

Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

1. $g(x) = x \iff \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2} = x \iff -\frac{1}{4}x^2 = \ln x$ (par croissance de la fonction logarithme népérien, les deux membres étant supérieurs à zéro) $\iff \frac{1}{4}x^2 + \ln x = 0 \iff x^2 + 4\ln x = 0 \iff f(x) = 0$.

On a vu que l'unique solution de cette équation est le réel positif α. Donc α est aussi l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

2. Voir plus bas. On peut conjecturer que la suite converge vers la solution de l'équation $g(x) = x$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ c'est-à-dire α.

3. Après avoir entré la fonction g dans la fonction $y_1(x)$ (calculatrice TI), on entre

0,5 Entrée

y_1(ANS(1)) Entrée

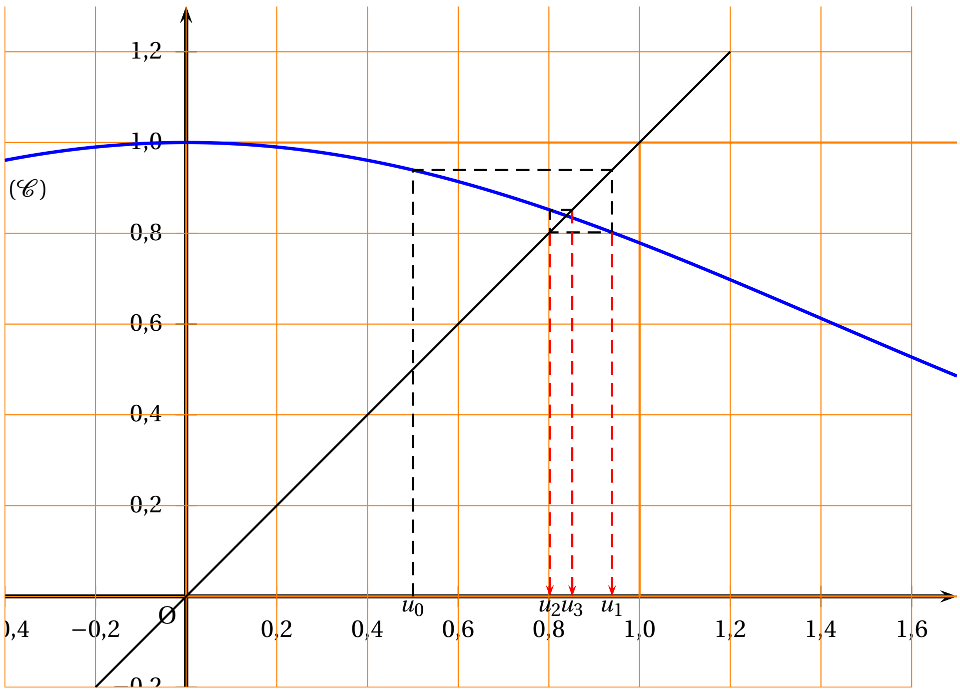
puis Entrée Entrée Entrée, ..., on obtient :

$u_0 = 0,5$, $u_1 \approx 0{,}939\,413$, $u_2 \approx 0{,}802\,018$, $u_3 \approx 0{,}851\,455$, $u_4 \approx 0{,}834\,232$, $u_5 \approx 0{,}840\,309$, $u_6 \approx 0{,}838\,174$, $u_7 \approx 0{,}838\,925$.

Le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques est donc $n = 6$.

Puisqu'on a supposé que $u_6 \leqslant \alpha \leqslant u_7$, on a donc $0{,}838\,174 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}838\,925$.

Donc $0,838$ est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.



Partie C - Un problème de distance

1. Avec $M(x\,;\,2\ln x)$, on a $\text{O}M^2 = x^2 + (2\ln x)^2 = x^2 + 4(\ln x)^2$.
Comme $x^2 > 0$ et $4(\ln x)^2 > 0$, on a $\text{O}M^2 > 0$.
Donc $\text{O}M = \sqrt{x^2 + 4(\ln x)^2}$.

2. **a.** h somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$h'(x) = 2x + 8(\ln x) \times \dfrac{1}{x} = 2x + 8\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{2x^2 + 8\ln x}{x} = \dfrac{2\left(x^2 + 4\ln x\right)}{x} = \dfrac{2f(x)}{x}$.
Comme $x > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui de $2f(x)$, donc celui de $f(x)$ qui a été étudié dans la partie A. Conclusion :
   - si $0 < x\alpha$: $h'(x) < 0$: la fonction h est décroissante sur $[0\,;\,\alpha[$;
   - si $x > \alpha$: $h'(x) > 0$: la fonction h est croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

   b. Le résultat précédent montre que la fonction h a un minimum $h(\alpha)$. La fonction définie par $x \longmapsto \text{O}M = \sqrt{h(x)}$ a les mêmes variations que la fonction h, donc un minimum en α.
Conclusion : il esiste un point unique de (Γ) $\text{A}(\alpha\,;\,2\ln\alpha)$ tel que $\text{OA} < \text{O}M$ pour tout point M de (Γ) distinct de A.

3. La tangente T_A à la courbe (Γ) au point A a pour vecteur directeur $\left(1\,;\,\varphi'(\alpha)\right) = \left(1\,;\,\dfrac{2}{\alpha}\right)$.
La droite OA a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{OA}}\,(\alpha\,;\,2\ln\alpha)$.
Le produit scalaire de ces deux vecteurs est égal à : $1 \times \alpha + \dfrac{2}{\alpha} \times 2\ln\alpha = \alpha + \dfrac{4\ln\alpha}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2 + 4\ln\alpha}{\alpha}$.
On a vu dans la question précédente que $f(\alpha) = \alpha^2 + 4\ln\alpha = 0$ donc le produit scalaire est nul, ce qui montre que la la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T_A.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Partie B - Questionnaire à choix multiples

1. **a.** Les points A, B, C définissent le plan P. Faux $2 - 1 + 3 = 0$ est faux.

   b. Les points A, B, D définissent le plan P. $\text{D}(-1\,;\,4\,;\,2) \in P \iff -2 - 4 + 6 = 0$: vrai ;
$\overrightarrow{\text{AB}}\,(-1\ ;\ 1\ :\ 1)$ et $\overrightarrow{\text{AD}}\,(-2\ ;\ 2\ :\ 2)$, donc $\overrightarrow{\text{AD}} = 2\overrightarrow{\text{AB}}$: les points A, B, D sont alignés : ils ne définissent pas un plan.

   c. $\text{E}(1\,;\,5\,;\,1) \in P \iff 2 - 5 + 3 = 0$: vrai.
$\overrightarrow{\text{AE}}\,(0\,;\,3\,;\,1)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{\text{AB}}$. Conclusion les trois points A, B et E définissent le plan P.

2. **a.** Un vecteur directeur de la droite D a pour cordonées $(-1\,;\,1\,;\,1)$.
Un vecteur normal au plan P a pour cordonées $(2\,;\,-1\,;\,3)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc D n'est pas perpendiculaire au plan P

   b. Le produit scalaire des deux vecteurs précédents est égal à : $-2 - 1 + 3 = 0$, donc la droite D est parallèle au plan P.
Le point de D correspondant à $t = 0$, donc de cordonnées $(1\,;\,0\,;\,2)$ n'appartient pas à P $(2 + 6 = 0$ est fausse), donc la droite D est strictement parallèle au plan P.

   c. On vient de voir que c'est faux.

3. La distance de Ω au plan P est égale à :
$d = \dfrac{|2 \times 2 - 5 + 3 \times 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$.
Or $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{2}{\sqrt{16}} < \dfrac{2}{\sqrt{14}}$.
La distance du point Ω au plan P est supérieure au rayon de la sphère : l'intersection de la sphère S et du plan P est donc vide.

EXERCICE 4 **5 points**

Enseignement obligatoire

1. On a $z_{\text{B}'} = \dfrac{2-\text{i}-\text{i}}{2+\text{i}+\text{i}} = \dfrac{2-2\text{i}}{2+2\text{i}} = \dfrac{1-\text{i}}{1+\text{i}} = \dfrac{(1-\text{i})(1-\text{i})}{(1+\text{i})(1-\text{i})} = \dfrac{1-1-2\text{i}}{1+1} = -\text{i}$.

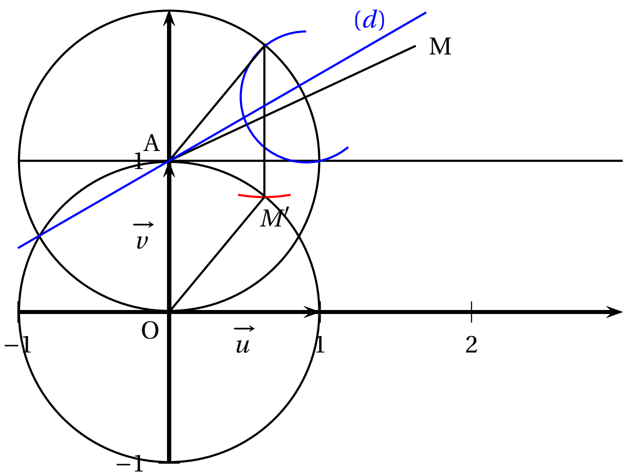
2. Avec $z \neq \text{i}$, $z = z' \iff x+\text{i}y = \dfrac{x+\text{i}y-\text{i}}{x-\text{i}y+\text{i}} \iff (x+\text{i}y)(x-\text{i}y+\text{i}) = x+\text{i}y-\text{i} \iff x^2+y^2-y-xy\text{i}+\text{i}x+xy\text{i} = x+\text{i}y-\text{i} \iff x^2+y^2-y+\text{i}x = x+\text{i}y-\text{i} \iff \begin{cases} x^2+y^2-y &= x \\ x &= y-1 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} (y-1)^2+y^2-y &= y-1 \\ x &= y-1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y^2-3y+1 &= y-1 \\ x &= y-1 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} 2y^2-4y+2 &= 0 \\ x &= y-1 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2-2y+1 &= 0 \\ x &= y-1 \end{cases} \iff \begin{cases} (y-1)^2 &= 0 \\ x &= y-1 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} y &= 1 \\ x &= 0 \end{cases}$
Cette solution n'est pas valide ($z = \text{i}$), puisque par définition $z \neq \text{i}$.
Conclusion : la transformation n'a pas de point invariant.

3. **a.** On a $\overline{\overline{z}+\text{i}} = \overline{\overline{z}} + \overline{\text{i}} = z + (-\text{i}) = z - \text{i}$. (le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués.)

   b. D'après l'égalité précédente : $z' = \dfrac{z-\text{i}}{\overline{z}+\text{i}} = \dfrac{z-\text{i}}{\overline{\overline{z-\text{i}}}} \Rightarrow |z'| = \left|\dfrac{z-\text{i}}{\overline{\overline{z-\text{i}}}}\right| = \dfrac{|z-\text{i}|}{\left|\overline{z-\text{i}}\right|} = 1$ puisque le module d'un complexe est égal à celui de son conjugué.
   Conclusion : $|z'| = \text{O}M' = 1$.
   Tous les points images appartiennent au cercle trigonométrique, centré en O et de rayon 1.

   c. De même l'égalité $z' = \dfrac{z-\text{i}}{\overline{\overline{z-\text{i}}}}$ donne pour les arguments :
   $\arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-\text{i}}{\overline{\overline{z-\text{i}}}}\right) \iff \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) - \left[-\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right)\right] = 2\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right)$.

   d. On a vu que le point M' appartient au cercle trigonométrique ; il suffit de trouver un des arguments.
   D'après la question précédente, on peut doubler l'argument de $z-\text{i}$ sur le cercle centré en A de rayon 1 et en reportant cet argument sur le cercle trigonométrique. Voir la figure.



4. **a.** Voir la figure : droite contenant A et faisant un angle de $\dfrac{\pi}{6}$ avec l'axe des abscisses.

   b. On a vu que si M est un point de la droite (d) distinct de A, un argument de son image M' est égale à $2 \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.
   On a aussi démontré que $\text{O}M' = 1$.
   L'image de la droite (d) est donc réduite au seul point du cercle trigonométrique d'argument $\dfrac{\pi}{3}$: c'est le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

EXERCICE 4 **5 points**
Enseignement de spécialité

1. **a.** On sait que l'écriture complexe d'une symétrie orthogonale est de la forme $z' = a\overline{z} + b$, a et b étant deux nombres complexes.

   b. Les deux points A et B sont invariants par la symétrie orthogonale d'axe (AB), donc
   $\left\{\begin{array}{lcl} 1+0\text{i} & = & a(1-0\text{i})+b \\ 6+\text{i} & = & a(6-\text{i})+b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a+b \\ 6+\text{i} & = & a(6-\text{i})+b \end{array}\right.$

   c. Par différence des deux équations précédentes, on a $5+\text{i} = a(5-\text{i}) \iff a = \dfrac{5+\text{i}}{5-\text{i}} = \dfrac{(5+\text{i})(5+\text{i})}{(5+\text{i})(5-\text{i})} = \dfrac{25-1+10\text{i}}{25+1} = \dfrac{12+5\text{i}}{13}$. D'où en remplaçant dans la première équation :
   $b = 1-a = 1-\dfrac{12+5\text{i}}{13} = \dfrac{1-5\text{i}}{13}$.
   Conclusion : la symétrie orthogonale d'axe (AB) a pour écriture complexe :

   $$z' = \frac{1}{13}(12+5\text{i})\overline{z} + \frac{1}{13}(1-5\text{i}).$$

   d. Avec $z = x+\text{i}y$ et $z' = x'+\text{i}y'$, on a :
   $z' = \dfrac{1}{13}(12+5\text{i})\overline{z} + \dfrac{1}{13}(1-5\text{i}) \iff x'+\text{i}y' = \dfrac{1}{13}(12+5\text{i})(x-\text{i}y) + \dfrac{1}{13}(1-5\text{i})$ d'où en identifiant parties réelles et parties imaginaires :
   $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{12}{13}x + \dfrac{5}{13}y + \dfrac{1}{13} \\ y' & = & \dfrac{5}{13}x - \dfrac{12}{13}y - \dfrac{5}{13} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{1}{13}(12x+5y+1) \\ y' & = & \dfrac{1}{13}(5x-12y-5) \end{array}\right.$

2. **a.** $M(x\,;\,y)$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si l'ordonnée de M' est nulle soit $\dfrac{1}{13}(5x-12y-5) = 0 \iff 5x-12y-5 = 0 \iff 5(x-1) = 12y$.

   b. L'égalité $5(x-1) = 12y$ montre que 5 divise $12y$, et étant premier avec 12, il divise y. Il existe donc un entier k tel que $y = 5k$.
   On a donc $5(x-1) = 12y \iff 5(x-1) = 12\times 5k \iff x-1 = 12k \iff x = 1+12k$.
   Conclusion : $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(1+12k\,;\,5k)$ où k est un entier relatif

3. **a.** x' est un entier donc $12x+5y+1$ est un multiple de 13 ou $12x+5y+1 \equiv 0 \quad [13](1)$.
   Or $12 \equiv -1 \quad [13]$ d'où $12x \equiv -x \quad [13]$, d'où en remplaçand dans (1) $-x+5y+1 \equiv 0 \quad [13]$ et enfin $x \equiv 5y+1 \quad [13]$, y étant lui aussi un entier.

   b. Soit $5x-12y-5 \equiv 5(5y+1)-12y-5 \quad [13]$ ou encore $5x-12y-5 \equiv 13y \quad [13]$ c'est-à-dire $5x-12y-5 \equiv 0 \quad [13]$ ce qui signifie que $5x-12y-5$ est un multiple de 13 et donc que y' est lui aussi un entier.

4. Avec $x = 2$, les cordonnées de M' sont entières si et seulement si :
   $\left\{\begin{array}{lcl} 24+5y+1 & \equiv & 0 \quad [3] \\ 10-12y-5 & \equiv & 0 \quad [13] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 5y+25 & \equiv & 0 \quad [3] \\ 5-12y-5 & \equiv & 0 \quad [13] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 25y+125 & \equiv & 0 \quad [3] \\ 10-24y & \equiv & 0 \quad [13] \end{array}\right. \Rightarrow$
   (par somme) $y+135 \equiv 0 \quad [13] \iff y \equiv -135 \quad [13]$.
   Comme $-135 \equiv -5 \quad [13]$, on obtient finalement $y \equiv -5 \quad [13]$.
   Conclusion : $y = 13k-5$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Les points de coordonnées $(2\,;\,13k-5)$ ont des images à cordonnées entières.